# EQUAZIONI UTILI PER IL SISTEMA DINAMICO

Introduciamo le grandezze e le variabili che utilizzeremo nello studio della dinamica del drone.

Queste equazioni rappresenteranno il sistema dinamico.

Introduciamo 2 sistemi di riferimento:

Un sistema di riferimento inerziale fisso, che indicheremo OC, di assi cartesiani , a cui corrispondono i versori ;

Un sistema di riferimento solidale col drone OABC assi cartesiani , con origine nel centro di massa del drone, e versori rispettivamente. Gli assi X e Y sono gli assi perpendicolari ai 2 piani di simmetria materiale e paralleli all’asse Z, in modo da avere una matrice di inerzia diagonale .

Introduciamo gli angoli di Eulero , cioè gli angoli che identificano la posizione degli assi X, Y, Z rispetto alla terna inerziale originaria.

Supponiamo di avere un generico vettore espresso nel sistema di riferimento solidale al drone. Possiamo esprimere lo stesso vettore nel sistema di riferimento inerziale utilizzando la matrice di rotazione:

Dunque, definito scomposizione dello stesso vettore nella terna inerziale, possiamo scrivere

Introduciamo il vettore di velocità angolare , scritto nel sistema di riferimento OABC;

Indichiamo con W1, W2, W3, W4 le velocità di rotazione dei 4 rotori, con e coefficienti correttamente dimensionati che legano tali velocità di rotazione con il momento generato dalla rotazione delle pale e con la portanza generata, rispettivamente.

Chiamiamo *L* la distanza tra i rotori e il baricentro del drone.

Ricaviamo la relazione che lega le velocità angolari con i momenti e le forze generati.

Il momento torcente di un motore è possibile scriverlo come:

è la corrente che scorre all’interno del motore, è la corrente che scorre quando non è presente nessun carico sul motore, è una costante di proporzionalità che lega le 3 grandezze appena descritte.

La differenza di potenziale ai capi del motore è la somma di due contributi:

Il primo contributo è dovuto alle resistenze interne al motore, il secondo contributo è dovuto alla forza elettromotrice di ritorno, un fenomeno dovuto all’induzione elettromagnetica.

Possiamo ora esprimere la potenza generata dal motore come:

Supponendo che non ci siano dispersioni di potenza, l’energia generata dal motore in un intervallo di tempo infinitesimo è il lavoro che viene esercitato dalla forza generata sulla massa di aria, che subisce uno spostamento infinitesimale . Quindi:

Dove è la velocità dell’aria causata dal movimento delle pale rispetto alla velocità asintotica del fluido, che nel caso più semplice di hoovering è approssimabile a 0.

Dagli studi sulla fluido dinamica e sulle forze generate da pale in movimento rispetto a un fluido emerge la relazione:

Dove è la densità dell’aria, A è l’area spazzata dalle pale in rotazione, è la portanza prodotta dalle pale.

Sostituendo le relazioni della velocità e della potenza otteniamo:

è una costante che lega proporzionalmente la portanza con il momento .

Riscrivendo in funzione della portanza:

Riscriviamo eguagliando il primo fattore con una costante .

Dunque,

Studiamo ora la relazione che lega i momenti con le velocità angolari:

Analizziamo prima il momento generato intorno all’asse .

Dalla fluidodinamica sappiamo che la forza resistente che si oppone a una pala in rotazione in un fluido è data da:

è una costante adimensionale, è la sezione trasversale della pala e non l’area spazzata da essa.

Supponiamo che tale forza sia applicata all’estremità della pala, di distanza dall’asse di rotazione delle pale. Il momento generato sarà dunque dato da:

Un ulteriore contributo è dato dall’accelerazione angolare che viene fornita dal motore ed è esprimibile come:

con momento d’inerzia intorno all’asse di rotazione del rotore. Poiché la nostra analisi, almeno in principio, si sviluppa unicamente intorno al caso di hoovering, dove l’accelerazione angolare è praticamente nulla, possiamo trascurare questo contributo.

Sommando i contributi di ogni rotore e ricordando che il verso di rotazione è positivo per il rotore 1,3 e negativo per il rotore 2,4, possiamo concludere che il momento intorno all’asse è:

Analizziamo i momenti intorno agli assi .

Con una semplice analisi meccanica si ricava:

rappresenta la distanza tra il rotore e il centro di massa e geometrico del drone.

Il modello dinamico è definito da 6 equazioni, le prime 3 che derivano dalla seconda legge della dinamica, le altre 3 sono un arrangiamento delle equazioni di Eulero.

Indichiamo con m la massa totale del drone.